

La respuesta buena es siempre a)
Primer parcial. Matemática VII 2:30-4:30 Miércoles 24 de enero de 2007

Este examen vale 25 puntos para un total de 100 puntos.

Nombre:

Carnet:

1 (4pt) La distribución $-f(x)\delta''(x-2)$ es:

a) $-f(2)\delta''(x-2) + 2f'(2)\delta'(x-2) - f''(2)\delta(x-2)$

b) $-f(2)\delta''(x-2) + f'(2)\delta'(x-2) - f''(2)\delta(x-2)$

c) $-f(2)\delta''(x-2) - 2f'(2)\delta'(x-2) - f''(2)\delta(x-2)$

d) $f(2)\delta''(x-2) + 2f'(2)\delta'(x-2) + f''(2)\delta(x-2)$

Solución

Hay que calcular:

$$-\langle g(x), f(x)\delta''(x-2) \rangle = -\left\langle \frac{d^2}{dx^2} (f(x)g(x)), \delta(x-2) \right\rangle = -f''(2)g(2) - 2f'(2)g'(2) - g''(2)f(2) \quad (1)$$

2 (4pt) ¿Cuál es la solución de la ecuación diferencial $x^2u''(x) + xu'(x) - 4u(x) = \delta(x)$ en el sentido de las distribuciones?

a) $-\delta(x)/3$

b) $\delta'(x)/3$

c) $\delta(x) + \delta'(x)/3$

d) $\delta(x)/3$

Solución

En este caso $L = x^2 \frac{d^2}{dx^2} + x \frac{d}{dx} - 4$. Calculamos

$$x^2\delta''(x) = 2\delta(x) \quad x^2\delta'''(x) = 6\delta'(x) \quad x^2\delta''''(x) = 12\delta''(x) \quad (2)$$

$$x\delta'(x) = -\delta(x) \quad x\delta''(x) = -2\delta'(x) \quad x\delta'''(x) = -3\delta''(x) \quad (3)$$

De ahí vemos que:

$$-L\delta(x)/3 = -\frac{1}{3}(2\delta(x) - \delta(x) - 4\delta(x)) = \delta(x) \quad (4)$$

3 (4pt) La integral de $\int_0^2 |x-1|xe^{-|x|}dx$

a) $-1 - 7e^{-2} + 6e^{-1}$

b) $-1 + 7e^{-2} + 6e^{-1}$

c) $-1 + 7e^{-1} + 7e^{-2}$

d) $-1 - 7e^{-1} + 7e^{-2}$

Solución

Primero fijate que el $|x|$ en la exponencial esta de más. Definimos la función

$$\phi(x) = \begin{cases} |x-1|x & \text{si } 0 < x < 2 \\ 0 & \text{otro } x \end{cases} \quad (5)$$

Calculemos la tercera derivada generalizada. La función sólo tiene un salto en $x = 2$ de altura -2 . Así que:

$$\phi'_g(x) = \begin{cases} 1 - 2x & \text{si } 0 < x < 1 \\ 2x - 1 & \text{si } 1 < x < 2 \end{cases} - 2\delta(x - 2) \quad (6)$$

$$\phi''_g(x) = \begin{cases} -2 & \text{si } 0 < x < 1 \\ 2 & \text{si } 1 < x < 2 \end{cases} + \delta(x) + 2\delta(x - 1) - 3\delta(x - 2) - 2\delta'(x - 2) \quad (7)$$

$$\phi'''_g(x) = -2\delta(x) + 4\delta(x - 1) - 2\delta(x - 2) + \delta'(x) + 2\delta'(x - 1) - 3\delta'(x - 2) - 2\delta''(x - 2) \quad (8)$$

De manera que el resultado final es

$$I = \langle \phi(x), e^{-x} \rangle = \langle \phi'''_g(x), e^{-2x} \rangle = (-2 + 4e^{-1} - 2e^{-2} + 1 + 2e^{-1} - 3e^{-2} - 2e^{-2}) \quad (9)$$

4 (4pt) El límite $n \rightarrow \infty$ de $\frac{n}{n^2x^2+1}$ es

- a) $\pi\delta(x)$
- b) $2\pi\delta(x)$
- c) $\pi\delta'(x)$
- d) $\delta(x)$

Solución

Usamos nuevamente el hecho de que si $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$ entonces el $\lim_{n \rightarrow \infty} n(fnx) = \delta(x)$. En nuestro caso sea $f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$ entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{(1 + n^2\pi^2)} = \delta \quad (10)$$

Por tanto el límite que nos piden es $\pi\delta(x)$.

5 (4pt) ¿Cuanto vale $(\delta(x))^2$?

- a) No está definido.
- b) Cero.
- c) $\delta'(x)$
- d) $2\delta(x)$

6 (2pt) ¿Cuál es la derivada generalizada de la función de $f(x) = (|x| + x)/2$?

- a) $H(x)$.
- b) $H(x) + \delta(x)$
- c) $H(x) - \delta(x)$
- d) $1 + \delta(x)$

Solución

La función es continua y por tanto no hay deltas.

7 (3pt) ¿Cuánto vale la integral $\int_{-2}^2 \delta'(x) \sin(\pi x) dx$

- a) $-\pi$
- b) π
- c) 0
- d) 1

Solución

$$\int_{-2}^2 \delta'(x) \sin(\pi x) dx = - \int_{-2}^2 \delta(x) \pi (-\cos(\pi x)) dx = -\pi \quad (11)$$